

立ち上がるゆで卵

町田 学

*Department of Applied Physics, School of Engineering, The University of Tokyo,
7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo 113-8656, Japan*

(平成 14 年 5 月 20 日)

この文章は、2002 年 3 月 28 日号の Nature にでた Moffatt と Shimomura による論文、“Spinning eggs – a paradox resolved” についての解説文である。[1] 散逸系で保存する Jellett 定数という量に着目する。Jellett 定数は卵の重心の高さと鉛直軸まわりの角速度との積に比例するので、摩擦の効果で角速度が落ちると、Jellett 定数を保つために重心が上がらなければならない。つまり、この Jellett 定数に着目することで、滑り摩擦が重心を持ち上げる効果を持つことが示されるのである。

Moffatt 氏が以前講義でこの問題に対する証明を行ったが、それを聴講していた下村氏がその証明の欠陥を指摘し、そこから二人の共同研究がはじまったそうである。

二人は、プリンキピアの原書が置いてあることで有名な Trinity College のレン図書館から、130 年前に書かれた Jellett の論文を見つけてきて読んだらしい。



ゆで卵を寝かせた状態で回転させるとなぜ立ち上がるのかという問題を解く。逆さコマ (tippe-top) の問題についての議論は以前からあったが、[2, 3, 4] 卵のようになめらかな軸対称曲面をもつ物体についての研究はこれまでほとんどなかった。

いったん卵は忘れて、まず剛体の力学の復習からはじめる。運動系の原点 O は剛体の慣性中心 ($\sum m\mathbf{r}=0$) にとることにする。

剛体内の、 O から r だけ離れた点の速度 v は、慣性中心の速度 V と角速度 ω を使って、

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (1)$$

と書ける。

剛体の運動エネルギー T は、

$$\begin{aligned} T &= \sum \frac{mv^2}{2} \\ &= \sum \frac{m}{2} (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 \\ &= \frac{MV^2}{2} + \frac{1}{2} \sum m \{ \omega^2 r^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})^2 \} \\ &= \frac{MV^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik} \omega_i \omega_k \end{aligned} \quad (2)$$

となる。ただし、全質量 ($\sum m$) を M と書き、慣性モーメントテンソル I_{ik} を

$$I_{ik} = \sum_l m(x_l^2 \delta_{ik} - x_l x_k) \quad (3)$$

と定義した。

運動系の座標 x, y, z を慣性主軸の方向にとれば I_{ik} は対角型になる。それに対応するテンソルの成分の値、 I_1, I_2, I_3 を主慣性モーメントを呼ぶ。これを用いると運動エネルギーは結局、

$$T = \frac{MV^2}{2} + \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) \quad (4)$$

となる。

ここで、半軸の長さが a, b, c の回転楕円体：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (5)$$

の主慣性モーメントを求めておく。今の場合、慣性中心は楕円体の中心に一致し、慣性主軸は楕円体の軸に一致する。さて、 $x = a\xi, y = b\eta, z = c\zeta$ とすると、 $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ である。

$$\begin{aligned} I_1 &= \rho \int (y^2 + z^2) dx dy dz \\ &= \rho abc \int (b^2 \eta^2 + c^2 \zeta^2) d\xi d\eta d\zeta \\ &= \rho abc \int (b^2 r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + c^2 r^2 \cos^2 \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ &= \rho abc \frac{4\pi}{15} (b^2 + c^2) \end{aligned} \quad (6)$$

I_2, I_3 についても同様に計算することができる。ここで、楕円体の体積 M が $\frac{4\pi}{3} abc$ であることに注意すると、

$$I_1 = \frac{M}{5} (b^2 + c^2), \quad I_2 = \frac{M}{5} (c^2 + a^2), \quad I_3 = \frac{M}{5} (a^2 + b^2) \quad (7)$$

であることが分かる。

さて、これから剛体の角運動量 \mathbf{H} を考えるが、このとき慣性系の原点も剛体の慣性中心にとっておく。すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \sum m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \\ &= \sum m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= \sum m \{ r^2 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}) \} \end{aligned} \quad (8)$$

となり、慣性モーメントテンソル I_{ik} を用いて、

$$H_i = I_{ik} \omega_k \quad (9)$$

と書ける。今、 x, y, z は慣性主軸の方向にとってあったので、結局、

$$H_1 = I_1 \omega_1, \quad H_2 = I_2 \omega_2, \quad H_3 = I_3 \omega_3 \quad (10)$$

となる。

次に剛体の運動方程式を考える。静止系で見ると、

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F} \\ \frac{d\mathbf{H}}{dt} = \mathbf{K} \end{cases} \quad (11)$$

という運動方程式がたつ。ここで、剛体の全運動量 ($\sum p$) を P 、剛体に働く全ての力の合力 ($\sum f$) を F 、力のモーメントを $K = \sum r \times f$ と書いた。上の2式を運動系 x, y, z で書き直す。すると、ただちに

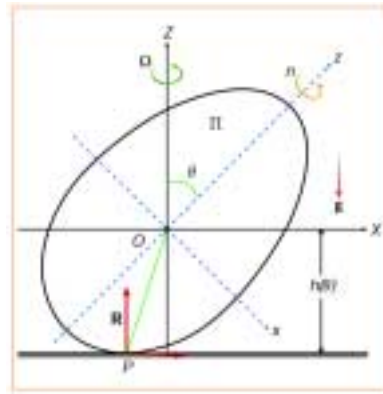
$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} + \omega \times P = F \\ \frac{dH}{dt} + \omega \times H = K \end{cases} \quad (12)$$

と書ける。左辺の prime のついた微分はベクトルの運動系に対する変化の速さを表す。 $H_1 = I_1 \omega_1$ などと書けていたから、上の H についての式を具体的に書き下すと、いわゆるオイラーの運動方程式が得られる。

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 &= K_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1 &= K_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 &= K_3 \end{aligned} \quad (13)$$

以上で準備は終わりである。

いよいよ具体的な問題の設定に入る。 X, Y, Z 系と x, y, z 系の原点は卵の慣性中心にとり、 x, y, z 系の軸は慣性主軸の方向にとる。 XZ 平面は常に卵の中心 O と卵と床の接点 P を含む平面 Π に一致し、 X, Y, Z 系は Z 軸の回りに角速度 Ω で回転している。また、卵の質量は M で、重力加速度は g であるとする。卵の自転の角速度を $n(t)$ とする。今、卵は Z 軸から角度 θ だけ傾いているとして、このときの、床から卵の中心までの距離を $h(\theta)$ と書くことにする。



まず、卵の角速度ベクトル ω を考えると、平面 Π にはりついた (x, y, z) 系で見たときは

$${}^t \omega_{xyz} = (0, \dot{\theta}, n - \Omega \cos \theta) \quad (14)$$

となる。上式での z 成分は、 Ω 回転を除いたもとの自転を表すために $-\Omega \cos \theta$ がついている。 X, Y, Z 系で見たときは

$${}^t \omega_{XYZ} = ((n - \Omega \cos \theta) \sin \theta, \dot{\theta}, (n - \Omega \cos \theta) \cos \theta) \quad (15)$$

となる。これより、静止系で見たときの卵の角速度ベクトル ω は

$$\begin{aligned} {}^t \omega &= ((n - \Omega \cos \theta) \sin \theta, \dot{\theta}, (n - \Omega \cos \theta) \cos \theta + \Omega) \\ &= ((n - \Omega \cos \theta) \sin \theta, \dot{\theta}, \Omega \sin^2 \theta + n \cos \theta) \end{aligned} \quad (16)$$

となる。主慣性モーメントを、 $A \equiv I_1 = I_2$ 、 $C \equiv I_3$ と書くと、角運動量 H は

$${}^t H = ((Cn - A\Omega \cos \theta) \sin \theta, A\dot{\theta}, A\Omega \sin^2 \theta + Cn \cos \theta) \quad (17)$$

となる。

また、接触点 P の位置 ${}^t X_P = (X_P, 0, Z_P)$ については、

$$X_P = \frac{dh}{d\theta}, \quad Z_P = -h \quad (18)$$

の関係があることが分かる。点 P の速度 U_P は

$${}^tU_P = (-h\dot{\theta}, V_P, 0) \quad (19)$$

と書ける。ここで、

$$V_P = (\Omega \sin^2 \theta + n \cos \theta) \frac{dh}{d\theta} + (n - \Omega \cos \theta) h(\theta) \sin \theta \quad (20)$$

である。 $|\Omega|$ に比べて $\dot{\theta}$ は非常に小さいので、

$${}^tU_P \simeq (0, V_P, 0) \quad (21)$$

とすることができる。定常状態では $U_P = \mathbf{0}$ である。点 P に働く摩擦力 F は ${}^tF = (0, F, 0)$ と書ける。ここで F は V_P の関数である。点 P にはまた、垂直抗力 ${}^tR = (0, 0, R)$ が働いている。したがって今の場合、先ほど導いた、角運動量に関するオイラーの運動方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \Omega \times \mathbf{H} = \mathbf{X}_P \times (\mathbf{R} + \mathbf{F}) \quad (22)$$

となる。 (X, Y, Z) 系の軸は慣性主軸の方向とは違うので、先ほどのように主慣性モーメントで運動方程式を表すことはできない。上式はただ単に、 Z 軸方向に回転する座標系に移った式を書いただけになっている。

さて、上式の Y 成分を計算すると、

$$A\ddot{\theta} - A\Omega^2 \cos \theta \sin \theta + Cn\Omega \sin \theta = -RX_P \quad (23)$$

となる。ここで、 $|\dot{\theta}| \ll \Omega^2$ であり、さらに Ω が十分に大きくて右辺が無視できるとすると、もし $\sin \theta \neq 0$ ならば、

$$Cn \simeq A\Omega \cos \theta \quad (24)$$

が成り立つことが分かる。この関係は回転釣り合い (gyroscopic balance) と呼ばれるものである。この回転釣り合い近似を導入することによって、角運動量ベクトル H は

$${}^tH = (0, A\dot{\theta}, A\Omega) \quad (25)$$

と書ける。この H を用いて上のオイラー方程式を計算すると、

$$A\dot{\Omega} = FX_P, \quad A\Omega\dot{\theta} = FZ_P \quad (26)$$

となる。これから直ちに

$$\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} = \frac{X_P}{Z_P} \dot{\theta} = -\frac{\dot{h}}{h} \quad (27)$$

の関係が得られ、これを積分することにより、

$$-H \cdot X_P = A\Omega h \equiv J \quad (28)$$

が分かる。ここで、 J は Jellett 定数 [5] と呼ばれ、初期条件から決まる。Jellett 定数は、床に接する面が球面である場合には厳密に保存することが知られている。

さて、回転釣り合いの式と Jellett 定数の式を V_P の式に代入して n と Ω を消去する。

$$\begin{aligned} \zeta &\equiv \left(\sin^2 \theta + \frac{A}{C} \cos^2 \theta \right)^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{d\zeta}{d\theta} &= \left(\frac{A}{C} - 1 \right) \cos \theta \sin \theta \zeta^3 \end{aligned} \quad (29)$$

に注意して、

$$V_P = \frac{J}{A} \zeta^{-3} h^{-1} \frac{d\zeta h}{d\theta} \quad (30)$$

となる。

また、 $Z_P = -h$, $A\Omega h = J$ を $A\Omega\dot{\theta} = FZ_P$ に代入すると、

$$J\dot{\theta} = -Fh^2 \quad (31)$$

を得る。あとは $h(\theta)$ と $F(V_P)$ の具体形が分かれば、これら 2 式より $\dot{\theta}$ を求めることができる。

$h(\theta)$ の形を具体的にするために、剛体の形をはじめの方で述べた回転楕円体で、半軸の長さが b, b, a のものを考える。すると、

$$A = I_1 = I_2 = \frac{M}{5}(a^2 + b^2), \quad C = I_3 = \frac{2M}{5}b^2 \quad (32)$$

である。また、

$$h(\theta) = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} \quad (33)$$

である。したがって、

$$V_P = \frac{J}{A} \zeta^{-3} h^{-1} \frac{d\zeta h}{d\theta} = -\frac{J}{4Ah^2} (a^2 - b^2) \sin 2\theta \quad (34)$$

今、

$$\Omega^2 \gg \frac{5g|a^2 - b^2|}{(a^2 + b^2) \min(a, b)} \quad (35)$$

が満たされていれば回転釣り合いが成り立つ。

次に、 F の形を決める。摩擦はクーロンの法則で

$$F = -\mu M g \frac{V_P}{|V_P|} \quad (36)$$

と与えられるとする。これで F と h の形が確定したので $J\dot{\theta} = -Fh^2(\theta)$ を積分すれば時刻 t での θ の値が求まるわけである。

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ に注意して、

$$F = \mu M g \operatorname{sgn}(a^2 - b^2) \operatorname{sgn}(J) \quad (37)$$

となる。

$$q_C \equiv \frac{Mgab(a-b)}{|a-b||J|} \quad (38)$$

とすると、

$$\dot{\theta} = -\frac{Fh^2}{J} = -\frac{\mu q_C}{ab} (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta) \quad (39)$$

上式を $t = t_0 \sim t$ まで積分する。このとき $\theta = \theta_0 \sim \theta$ まで動く。ただし、 t_0 は $\arctan\left(\frac{a}{b} \tan \theta_0\right) = 0$ となるように決める。

$$\int \frac{d\theta}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} = -\int \frac{\mu q_C}{ab} dt \quad (40)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \text{(上式左辺)} &= \int_{2\theta_0}^{2\theta} \frac{d\theta}{a^2 + b^2 + (a^2 - b^2) \cos \theta} \\ &= \frac{1}{b^2} \int_{\tan \theta_0}^{\tan \theta} \frac{dx}{\frac{a^2}{b^2} + x^2} \\ &= \frac{1}{ab} \int_{\arctan\left(\frac{b}{a} \tan \theta_0\right)}^{\arctan\left(\frac{b}{a} \tan \theta\right)} d\phi \\ &= \frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{b}{a} \tan \theta\right) \end{aligned} \quad (41)$$

と積分できる。上式の変形で、 $2\theta \rightarrow \theta$ 、 $\tan \frac{\theta}{2} = x$ 、 $x = \frac{a}{b} \tan \phi$ の変数変換を行った。以上より、

$$\tan \theta = -\frac{a}{b} \tan \mu q_C (t - t_0) \quad (42)$$

を得る。上式を見ると、prolate spheroid (レモン型) の場合 $q_C > 0$ で、 θ は $\frac{\pi}{2}$ から 0 まで時間とともに単調減少する。一方、oblate spheroid (みかん型) の場合 $q_C < 0$ で、 θ は 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで時間とともに単調増加する。いずれの場合も時間

$$\Delta t = \frac{\pi}{2|\mu q_C|} \quad (43)$$

で不安定状態から安定状態へ遷移する。

最後に、粘性摩擦を仮定して F の形を

$$F = -\mu M g V_P \quad (44)$$

と与えたとする。

$$q_v \equiv \frac{5g(a^2 - b^2)}{2(a^2 + b^2)} \quad (45)$$

とすると、

$$\dot{\theta} = -\frac{F h^2}{J} = -\frac{\mu q_v}{2} \sin 2\theta \quad (46)$$

上式を $t = t_0 \sim t$ まで積分する。このとき $\theta = \theta_0 \sim \theta$ まで動く。ただし、 t_0 は今度は $\tan \theta_0 = 1$ となるように選ぶ。

$$\int \frac{d\theta}{\sin 2\theta} = -\int \frac{\mu q_v}{2} dt \quad (47)$$

ここで、

$$\begin{aligned} (\text{上式左辺}) &= \frac{1}{2} \int_{2\theta_0}^{2\theta} \frac{d\theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\tan \theta_0}^{\tan \theta} \frac{dx}{x} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\tan \theta}{\tan \theta_0} \right) \end{aligned} \quad (48)$$

と積分できる。上式の変形で、 $2\theta \rightarrow \theta$ 、 $\tan \frac{\theta}{2} = x$ の変数変換を行った。以上より、

$$\tan \theta = e^{-\mu q_v (t - t_0)} \quad (49)$$

を得る。上式を見ると、今の場合は $q_v > 0$ のときに θ は時間とともに単調減少し、 $q_v < 0$ のときは θ は時間とともに単調増加する。今度も、いずれの場合でも時間

$$\Delta t = \frac{\pi}{2|\mu q_v|} \quad (50)$$

で不安定状態から安定状態へ遷移する。

この話しのポイントは、回転釣り合いが満たされる場合には、任意の回転体において Jellett 定数が断熱不変量として存在するということである。

最後に生卵についても言及しておく。生卵の場合には、殻の角速度が内部の液体へ拡散してしまうので、回しても立ち上がらない。つまり、最初与えられた運動エネルギーはすぐに散逸してしまい、回転釣り合いを満たすことができない。

参考文献

- [1] H.K. Moffatt and Y. Shimomura, *Nature* **416**(2002)385
- [2] C.M. Braams, *Physica* **18**(1952)503
- [3] N.M. Hugenholtz, *Physica* **18**(1952)515
- [4] C.G. Gray and B.G. Nickel, *Am.J.Phys.* **68**(2000)821
- [5] J.H. Jellett, *A Treatise on the Theory of Friction* (Macmillan, London, 1872)